ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES - ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE - SESSION 1984

1ère EPREUVE DE MATHEMATIQUES

durée : 2 h

Cette épreuve est destinée aux Elèves des classes de Mathématiques Spéciales M, P, T et TA.

Lors de la correction de l'épreuve, il sera tenu compte :

- de la clarté de la rédaction
- de la rigueur des raisonnements
- du choix de la solution proposée.

Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Les exercices I et II sont indépendants.

I - 1) Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ en fonction de n.

2) On considère la fonction f : $x \longmapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

Montrer que pour tout x, réel positif

$$x - \frac{x^2}{2} < f(x) < x$$

3) Etudier la convergence de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

II - On note M_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans un corps commutatif K.

Si $A = (a_{ij})$ $i = 1...n$, $j = 1...n$ est un élément de M_n, on appelle trace de A l'élément de K défini par

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

On désigne par L(E) l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E sur K. On suppose E de dimension n, soit B une base de E, on note $M_B(u)$ élement de M_n, la matrice associée à l'endomorphisme u de L(E) dans cette base B.

Id_E : est l'application identique de E.

1) - a) Soient A et B deux matrices de M_n. Calculer Tr(A.B) et Tr(B.A). Conclusion.

b) Si A et P sont deux matrices de M_n et si P est inversible, comparer Tr(A) et $Tr(P^{-1} AP)$

c) En déduire que $Tr\left[M_B(u)\right]$ est indépendante de la base B.